НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

___________ Олег КЛЕСОВ

«   » травня 2020 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Асимптотична нормальність оцінки параметрів тригонометричної регресії з сильно залежним шумом»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-81мн
Драбик Тетяна Олегівна ___________

Керівник:
проф., д. ф.-м. н., проф.
Іванов Олександр Володимирович ___________

Рецензент:
Професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
д. ф.-м. н., с. н. с.
Мацак Іван Каленикович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2020

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Олег КЛЕСОВ

«   »   2020 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Драбик Тетяні Олегівні

1. Тема дисертації «Асимптотична нормальність оцінки параметрів тригонометричної регресії з сильно залежним шумом», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор,

затверджені наказом по університету від «   »   2020 р. № _______.

2. Термін подання студентом дисертації 11 травня 2020 р.

3. Об’єкт дослідження тригонометрична модель регресії з дискретним часом спостереження.

4. Предмет дослідження асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної регресії з сильно залежним шумом.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) довести теорему редукції;

2) довести теорему єдиності для оцінки найменших квадратів;

3) довести асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 26 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1) Т. О. Драбик. Асимптотична єдиність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії. // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”. – Київ. – 2019. – с. 15.

2) Т. О. Драбик. Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії. // IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”. – Київ. – 2020. – с. 8.

8. Дата видачі завдання 03 лютого 2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	04.02.2020-17.02.2020	виконано
2.	Доведення теореми редукції	18.02.2020-10.03.2020	виконано
3.	Доведення асимптотичної єдиності оцінки найменших квадратів	11.03.2020-30.03.2020	виконано
4.	Доведення асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів	31.03.2020-15.04.2020	виконано
5.	Оформлення роботи	16.04.2020-08.05.2020	виконано

Студент Тетяна ДРАБИК

Науковий керівник дисертації Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 53 сторінки, 26 слайдів для проектора, 24 першоджерела.

Вивчаються асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії з сильно залежним шумом.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінка найменших квадратів параметрів функції регресії є асимптотично нормальною.

Завданням роботи є отримання результатів про асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної функції регресії. Об'єктом дослідження є тригонометрична модель регресії з дискретним часом спостереження та відкритою опуклою параметричною множиною. Предметом дослідження є властивості асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної функції регресії.

Для отримання вказаних результатів використано складні поняття теорії часових рядів та статистики часових рядів, а саме: локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, стаціонарний часовий ряд із сингулярною спектральною щільністю, спектральна міра функції регресії, припустимість сингулярності спектральної щільності стаціонарного часового ряду відносно цієї міри, розклади за поліномами Чебишова-Ерміта значень перетвореного гауссівського часового ряду та його коваріацій, центральна гранична теорема для зважених векторних сум значень такого локального перетворення та теорему Брауера про нерухому точку.

Вперше в тригонометричній моделі регресії з описаним стаціонарним часовим рядом в якості шуму, що має сингулярний спектр, доведено асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів невідомих параметрів, до того ж записано в явному вигляді коваріаційну матрицю граничного

нормального розподілу. Це визначає актуальність, важливість та новизну отриманих результатів для статистики часових рядів.

Ключові слова: тригонометрична модель регресії, функція регресії, випадковий шум, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка найменших квадратів, сингулярна спектральна щільність, спектральна міра функції регресії, μ-припустимість, розклади за поліномом Чебишова-Ерміта, ранг Ерміта, асимптотична нормальність.

Abstract

Master degree thesis contains 53 pages, 26 slides for projector, 24 primary sources.

The least squares estimator asymptotic properties of the parameters of trigonometric regression model with strongly dependent noise are studied.

The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise under which the least squares estimator of regression model parameters are asymptotically normal.

The task of the research is receiving results on the least squares estimator asymptotic normality of trigonometric regression parameters. Trigonometric regression model with discrete observation time and open convex parametric set is research object. Asymptotic normality of trigonometric regression model parameters the least squares estimator is research subject.

For obtaining the thesis results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, spectral measure of regression function, admissibility of singular spectral density of stationary time series in relation to this measure, expansions by Chebyshev-Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values and it's covariances, central limit theorem for weighted vector sums of the values of such a local transformation and Brouwer fixed point theorem.

For the first time in trigonometric regression model with described stationary time series as noise having singular spectrum, the least squares estimator asymptotic normality of unknown parameters are proved, and covariance matrix of the limiting normal law is written down in explicit form. These facts determine urgency, importance and novelty of results obtained for statistics of time series.

Key words: trigonometric regression model, regression function, random

noise, local transformation of Gaussian stationary time series, the least squares estimator, singular spectral density, spectral measure of regression function, μ-admissibility, expansions by Chebyshev-Hermite polynomials, Hermite rank, asymptotic normality.

Зміст

Вступ

У магістерській дисертації розглядається нелінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому сенсі, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням гауссівського часового ряду з сингулярною спектральною щільністю (с.щ.). Результати стосовно лінійних та нелінійних моделей регресії в статистиці випадкових процесів наведено у монографіях, які перелічено в роботі [1].

Серед різноманітних проблем нелінійного регресійного аналізу варто звернути увагу на задачу оцінювання амплітуд та кутових частот, взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що маскується адитивним випадковим шумом. Таку модель регресії називають тригонометричною, а описану задачу – задачею про виявлення прихованих періодичностей.

Асимптотичну поведінку оцінок найменших квадратів (о.н.к.) параметрів тригонометричної моделі регресії у 50-х роках минулого століття вивчав П. Уітл [2], а пізніше цю задачу розв'язували А.М. Уолкер [3], Е.Дж. Хеннан [4], А.Я. Дороговцев [5], О.В. Іванов [6] та ін. в моделях із дискретним та неперервним часом за різними припущеннями відносно випадкового шуму. Паралельно різні узагальнення тригонометричної моделі регресії досліджували А.Я. Дороговцев та П.С. Кнопов [7].

В роботі досліджується асимптотично нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та шумом, що є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Тут ми спираємось на статтю О. В. Іванова, Н.Н. Леоненка, М.Д. Руїз-Медини, Б.М. Жураковського [8]. На відміну від вказаної статті, у якій доведення асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів тригонометричної моделі здійснюється із застосуванням діаграмної формули, ми користуємось теоремою про асимптотичну нормальність деякої зваженої векторної суми, яку доведено в статті О. В. Іванова, Н.Н. Леоненка, М.Д. Руїз-Медини, І.М. Савич [9].

Магістерська дисертація складається із чотирьох розділів.

У 1-му розділі розглянуто модель спостережень та наведено допоміжні факти, які потрібні для доведення асимптотичної нормальності о.н.к. Серед них формули для с.щ. вказаного гуссівського стаціонарного часового ряду та його згорток, поняття спектральної міри μ функції регресії, μ-припустимості с.щ. часового ряду, ранг Ерміта інтегровної з квадратом за стандартною гауссівською щільністю функції, сформульовано центральну граничну теорему для зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром [9].

У 2-му розділі для загальної нелінійної моделі регресії доведено теорему редукції (теорема 3), яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу о.н.к. в нелінійній моделі вивченням асимптотичного розподілу о.н.к. у деякій допоміжній лінійній моделі. Таким чином, вказана теорема 3, фактично, є теоремою лінеаризації. Перевірено виконання умов теореми редукції для тригонометричної моделі регресії.

У 3-му розділі для загальної моделі регресії доведено теорему 4 про асимптотичну єдиність о.н.к. і показано, що тригонометрична функція регресії задовольняє умовам даної теореми.

В 4-му розділі, з використанням результатів попередніх розділів та теореми Брауера про нерухому точку доведено загальну теорему 5 про асимптотичну нормальність о.н.к. в сенсі Уолкера. Далі знайдено спектральну міру тригонометричної функції регресії та отримано теорему 6 про асимптотичну нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії.

Результати 3-го розділу доповідались на VIII Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики [10].

Результати 4-го розділу сформульовано в матеріалах IX Всеукраїнської конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики [11].

1 Постановка задачі та допоміжні результати

Припустимо, що випадкові процеси, які розглядаються в подальшому тексті, задано на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Розглянемо модель регресії

$$X_t = g(t, \theta^0) + \varepsilon_t, \;\; t = \overline{1, T}, \tag{1.1}$$

де $g : \mathbb{N} \times \Theta_\gamma \to \mathbb{R}$ – неперервна функція при кожному $t \in \mathbb{N}$ на $\Theta_\gamma = \bigcup\limits_{\|a\| \le 1} (\Theta + \gamma a)$, $\gamma > 0$ – деяке число, $\Theta \in \mathbb{R}^q$ – відкрита множина, що містить монотонно неспадну послідовність відкритих опуклих множин $\{\Theta_T,\, T \ge 1\}$ таких, що $\bigcup\limits_{t=1}^{\infty} \Theta_T = \Theta$. Істинне значення параметра $\theta^0 \in \Theta_T$ для достатньо великих T (будемо писати $T > T_0$).

Відносно шуму ε припустимо, що

A1. $\varepsilon_t = G(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, де $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – борелева функція, причому $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^4 < \infty$.

A2. ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$, є гауссівським стаціонарним часовим рядом, $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, із коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^{r} A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), \;\; r \ge 0, \;\; t \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

$$B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1+t^2)^{\alpha_j/2}}, \;\; \alpha_j \in (0,1), \tag{1.3}$$

$0 \le \varkappa_0 < \varkappa_1 < ... < \varkappa_r < \pi$, $\sum\limits_{j=0}^{r} A_j = 1$, $A_j > 0$.

Нехай $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^{r} A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), \;\; r \ge 0, \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

де $A_j > 0$, $j = \overline{0, r}$, $\sum\limits_{j=0}^{r} A_j = 1$,

$$B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1+t^2)^{\alpha_j/2}}, \;\; \alpha_j \in (0,1), \tag{1.5}$$

$0 \le \varkappa_0 < \varkappa_1 < ... < \varkappa_r < \pi$.

С.щ. $\tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} A_j \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda), \;\; \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

де для $j = \overline{0, r}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda) = \frac{c_1(\alpha_j)}{2} \Big(K_{\frac{\alpha_j - 1}{2}} \left(|\lambda + \varkappa_j|\right) |\lambda + \varkappa_j|^{\frac{\alpha_j - 1}{2}} + $$
$$+ K_{\frac{\alpha_j - 1}{2}} \left(|\lambda - \varkappa_j|\right) |\lambda - \varkappa_j|^{\frac{\alpha_j - 1}{2}} \Big), \tag{1.7}$$

$$c_1(\alpha) = \frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \;\; K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu - 1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) z \right\} ds,$$
$$z \ge 0, \;\; \nu \in \mathbb{R}.$$

Функція $K_\nu(z)$, $z \ge 0$, називається модифікованою функцією Бесселя 2-го роду порядку ν, або функцією Макдональда [12]. Відмітимо, що

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$$

і при $z \to 0$

$$K_\nu(z) \backsim \Gamma(\nu) 2^{\nu - 1} z^{-\nu}, \; \nu > 0.$$

В околах точок $\lambda = \pm \varkappa_j$, $j = \overline{0, r}$,

$$\tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda) = \frac{c_2(\alpha_j)}{2} \Big[|\lambda + \varkappa_j|^{\alpha_j - 1} \big(1 - h_j(|\lambda + \varkappa_j|)\big) + $$
$$+ |\lambda - \varkappa_j|^{\alpha_j - 1} \big(1 - h_j(|\lambda - \varkappa_j|)\big) \Big], \tag{1.8}$$

де $c_2(\lambda) = \left(2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha \pi}{2} \right)^{-1}$,

$$h_j\big(|\lambda|\big) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_j + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3 - \alpha_j}{2}\right)} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^{1 - \alpha_j} + \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_j + 1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3 + \alpha_j}{2}\right)} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^2 + o\big(|\lambda|^2\big), \;\; \lambda \to 0, \;\; j = \overline{0, r}.$$

Отже, с.щ. (1.6) має $2r+2$ точки сингулярності, якщо $\varkappa_0 \ne 0$, та $2r+1$ точку сингулярності, якщо $\varkappa_0 = 0$. Процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є процесом з сильною залежністю, якщо $\varkappa_0 = 0$.

Коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, стаціонарного часового ряду ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$, з умови **A2** має спектральне представлення

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda, \;\; t \in \mathbb{Z}, \tag{1.9}$$

тобто $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ – послідовність коефіцієнтів Фур'є с.щ.

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} A_j f_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda), \;\; \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{1.10}$$

Зауважимо, що с.щ. (1.10) та с.щ. (1.6), що відповідає неперервному аналогу (1.4) коваріаційної функції $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, пов'язані між собою співвідношенням [13]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k), \;\; \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{1.11}$$

Оскільки функція Макдональда має властивість

$$K_\nu(z) \backsim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \;\; z \to +\infty, \;\; \nu \geq 0, \tag{1.12}$$

то ряд (1.11) збігається, і функція $f(\lambda)$ означена коректно. До того ж можна сказати, що функція $f(\lambda)$ має, як і функція $\tilde{f}(\lambda)$, ті ж самі сингулярності в точках $\lambda = \pm\varkappa_j \in (-\pi, \pi)$, $j = \overline{0, r}$.

Припустимо, що функції $g(t, \cdot)$ неперервно-диференційовні на Θ_γ, $t \geq 1$. Позначимо

$$g_i(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta), \;\; i = \overline{1, q}.$$

Розглянемо вектор-градієнт $\nabla g(t, \theta) = \big(g_1(t, \theta), ..., g_q(t, \theta)\big)^*$, функції регресії $g(t, \theta)$, $\theta \in \Theta_\gamma$, $t \in \mathbb{N}$.

Нехай $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевих підмножин інтервалу $[-\pi, \pi]$. Введемо матричну міру $\mu_T(d\lambda, \theta)$, $\theta \in \Theta_\gamma$ на $\big([-\pi, \pi], \mathcal{B}\big)$ з матрицею щільності

$$\big(\mu_T^{kl}(\lambda, \theta)\big)_{k,l=1}^{q} = \left(g_T^k(\lambda, \theta)\overline{g_T^l(\lambda, \theta)}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|g_T^k(\lambda, \theta)\right|^2 d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left|g_T^l(\lambda, \theta)\right|^2 d\lambda\right)^{-1/2}\right)_{k,l=1}^{q}, \tag{1.13}$$

$$g_T^k(\lambda,\theta)=\sum_{t=1}^{T}e^{i\lambda t}g_k(t,\theta),\ \ \lambda\in[-\pi,\pi],\ \ k=\overline{1,q}.$$

Відмітимо, що $d_{kT}^2(\theta)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|g_T^k(\lambda,\theta)\right|^2d\lambda=\sum\limits_{t=1}^{T}g_k^2(t,\theta),\ k=\overline{1,q}.$

B1. Послідовність мір $\mu_T(d\lambda,\theta)$ слабко збігається до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda,\theta)$:

$$\mu_T\Longrightarrow\mu,\ \ T\to\infty. \tag{1.14}$$

Умова **B1** вказує, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ матриці $\mu(d\lambda,\theta)$ є комплексні заряди обмеженої варіації, а матриці $\mu(B,\theta)$, $B\in\mathcal{B}$, невід'ємно визначені, причому $\mu\big([-\pi,\pi],\theta\big)$ – додатно визначена матриця. До того ж, для будь-якої неперервної та обмеженої функції $a(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}a(\lambda)\,\mu_T(d\lambda,\theta)\longrightarrow\int\limits_{-\pi}^{\pi}a(\lambda)\,\mu(d\lambda,\theta),\ \ T\to\infty. \tag{1.15}$$

Означення 1. *Міра $\mu(d\lambda,\theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t,\theta)$ [14, 15] (точніше, її вектор-градієнта $\nabla g(t,\theta)$ [16]).*

За умов $\lim\limits_{T\to\infty}d_{iT}^2(\theta)=\infty$, $\max\limits_{1\le t\le T}|g_i(t,\theta)|=o(d_{iT}(\theta))$ при $T\to\infty$, $i=\overline{1,q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda,\theta)$ міри $\mu(d\lambda,\theta)$ можна визначити із співвідношень [15]

$$R^{kl}(h)=\lim_{T\to\infty}d_{kT}^{-1}(\theta)d_{lT}^{-1}(\theta)\sum_{t=1}^{T}g_k(t+h,\theta)g_l(t,\theta)=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda h}\,\mu^{kl}(d\lambda,\theta),\ \ k,l=\overline{1,q}, \tag{1.16}$$

які виконуються при кожному $h\in\mathbb{Z}$.

Введемо матрицю

$$J_T(\theta)=\Big(J_{kl,T}(\theta)\Big)_{k,l=1}^{N}=\left(d_{kT}^{-1}(\theta)d_{lT}^{-1}(\theta)\sum_{t=1}^{T}g_k(t,\theta)g_l(t,\theta)\right)_{k,l=1}^{q}. \tag{1.17}$$

Тоді з (1.13) при $a(\lambda) = 1,\ \lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$J_T(\theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta) \longrightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta) = \mu\big([-\pi, \pi], \theta\big) = J(\theta),\ \ T \to \infty, \tag{1.18}$$

причому матриця $J(\theta)$ додатно визначена за означенням спектральної міри μ. Звідси, і матриці $\Lambda_T(\theta) = J_T^{-1}(\theta)$ додатно визначені для $T > T_0$. До того ж, $\lim\limits_{T\to\infty} \Lambda_T(\theta) = \Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta)$ також додатно визначена матриця.

Зауважимо, що коли $a(\lambda)$ втрачає властивості неперервності та обмеженості, співвідношення (1.15) може в деяких випадках також виконуватись. Для цього дамо відповідне означення для с.щ. стаціонарного часового ряду $f(\lambda),\ \lambda \in [-\pi, \pi]$.

Означення 2. *С.щ. f називаєтьcя μ-припустимою [15], якщо вона інтегрована за мірою μ, тобто всі елементи матриці $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, \mu(d\lambda, \theta)$ скінченні, та для $a = f$ виконуєтьcя (1.15).*

Далі будемо розглядати властивість μ-припустимості с.щ. $f(\lambda),\ \lambda \in [-\pi, \pi]$, яку задано формулою (1.11). Введемо множину індексів $I = \{\,\overline{-r, r}\,\}$ і для визначеності нехай $\chi_0 = 0$. Покладемо $\lambda_{-l} = -\lambda_l$, $\lambda_l = \chi_l,\ l = \overline{1, r},\ \lambda_0 = \chi_0 = 0$. Опираючись на формули (1.7), (1.8) та (1.11), можна стверджувати існування достатньо великого числа $c_0 > 0$, що для всіх $c \geq c_0$ знайдуться околи $V_l(c)$ точок $\lambda_l,\ l \in I$, для яких

$$\{\lambda \in [-\pi, \pi] : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{l \in I} V_l(c), \tag{1.19}$$

причому $V_l(c)$ у (1.19) не перетинаються та міри Лебега $m\big(V_l(c)\big) \downarrow 0$ при $c \to \infty,\ l \in I$.

B2. Для $T > T_0$

$$d_{kT}^{-1}(\theta^0) \max_{\lambda \in V_l(c_0)} \left| g_T^k(\lambda, \theta^0) \right| < h_{lk}(\theta^0) < \infty,\ \ l \in I,\ \ k = \overline{1, q}. \tag{1.20}$$

Наступне твердження є варіантом загальної теореми роботи [8] для дискретного часу спостережень та с.щ. (1.11).

Теорема 1. *Нехай виконуютья умови* ***A2***, ***B1***, ***B2*** *та с.щ.* f *інтегрована за мірою* μ. *Тоді* f *є* μ*-припустимою функцією.*

Далі ми побачимо, що теорема 1 потрібна для доведення асимптотичної нормальності о.н.к.

Нехай деяка функція $W \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ – стандартна гауссівська щільність. Тоді її можна розкласти в цьому гільбертовому просторі в ряд Фур'є за поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n \left(\sqrt{2\pi}\varphi(x)\right)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} \left(\sqrt{2\pi}\varphi(x)\right), \ \ n \geq 0,$$

що утворюють повну ортогональну систему в гільбертовому просторі $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(W)}{n!} H_n(x), \ \ C_n(W) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x) H_n(x) \varphi(x)\,dx, \ \ n \geq 0. \tag{1.21}$$

У формулюванні ЦГТ 2 (див. нижче) будемо вважати, що $C_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x)\varphi(x)\,dx = \mathbb{E}W(\varepsilon_0) = 0.$

Означення 3. *Функція* $W \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$ *має ранг Ерміта* m *(*$Hrank(W) = m$*), якщо або* $C_1(W) \neq 0$ *та* $m = 1$, *або для деякого* $m \geq 2$

$$C_1(W) = ... = C_{m-1}(W) = 0, \ \ C_m(W) \neq 0. \tag{1.22}$$

У сформульованій нижче ЦГТ використано поняття ермітового рангу функції для деякої векторної суми випадкових величин та с.щ., що відповідають стаціонарним часовим рядам із коваріаційними функціями $B^s(t)$, $s \in \mathbb{N}$, де $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – коваріаційна функція часового ряду ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$, з умови **A2**.

Загальновідомо, що коваріаційній функції $B^s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 2$, де $B(t)$ – коваріаційна функція (1.4), відповідає s-та згортка

$$\tilde{f}^{*s}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^{s-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - ... - \lambda_s) \prod_{i=2}^{s} \tilde{f}(\lambda_i)\,d\lambda_2...d\lambda_s, \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.23}$$

с.щ. (1.6)-(1.8), стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який було розглянуто вище. Тоді за формулою Е.Хеннана (1.11) коваріаційній функції $B^s(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, відповідає с.щ.

$$f^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*s}(\lambda + 2\pi k), \;\; \lambda \in [-\pi, \pi], \;\; s \geq 2. \tag{1.24}$$

Будемо вважати за означенням, що $\tilde{f}^{*1}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ та $f^{(1)}(\lambda) = f(\lambda)$, до того ж, сформулюємо для функції $W \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)\, dx)$ наступну альтернативу.

A3. Або **(i)** $Hrank(W) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$, або **(ii)** $Hrank(W) = m$, $m\alpha > 1$, де

$$\alpha = \min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l, \tag{1.25}$$

α_l – параметри коваріаційної функції (1.3) стаціонарного часового ряду ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$.

Нехай для функції W виконується умова **(i)**. При виконанні умови **(ii)** подальші міркування аналогічні. Звідси коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, за формулами (1.4), (1.5) інтегрована з квадратом на $\mathbb{R}$ і згортка

$$\tilde{f}^{*2}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^2(t)\, dt, \;\; \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

є обмеженою та неперервною функцією. До того ж, для будь-якого $s \geq 2$

$$\tilde{f}^{*s}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^s(t)\, dt \leq \frac{B^{s-2}(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)\, dt < \infty, \tag{1.27}$$

і всі згортки $\tilde{f}^{*s}$ неперервні та обмежені однією константою, враховуючи наше припущення $B(0) = 1$.

Також зауважимо, що з рівності

$$B^s(t) = \left(\sum_{l=0}^{s} A_l B_{\alpha_l, \varkappa_l}(t) \right)^s, \;\; t \in \mathbb{R}, \;\; s \geq 2, \tag{1.28}$$

після підведення правої частини в s-й степінь видно, що с.щ. $\tilde{f}^{*s}(\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій Макдональда порядків $\nu > 1$. Також для даних функцій справедлива асимптотична формула (1.12), і ряди (1.24) збігаються рівномірно за $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гауссівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром, яку доведено в роботі [17]. Нам знадобиться додаткова умова

B3. Для $T > T_0$,

$$d_{iT}^{-1}(\theta^0) \max_{t=\overline{1,T}} |g_i(t, \theta^0)| \le k^i(0) \cdot T^{-1/2}, \ \ i = \overline{1, q}. \tag{1.29}$$

Теорема 2. *Нехай виконуютья умови **A1**, **A2**, **B1**-**B3** та одна з наступних умов для функції $W \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$:*

(i) *$Hrank(W) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$ та с.щ. f часового ряду ε_t, $t \in \mathbb{Z}$, є μ-припустимою;*

(ii) *$Hrank(W) = m$ та $m\alpha > 1$, де α задана формулою (1.25). Тоді випадковий вектор*

$$\zeta_T = d_T^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^{T} W(\xi_t) \nabla g(t, \theta^0), \ \ \nabla g(t, \theta^0) = \big(g_1(t, \theta^0), ..., g_q(t, \theta^0)\big)^* \tag{1.30}$$

асимптотично нормальний $N(0, \sigma)$ при $N \to \infty$, де

$$\sigma = 2\pi \sum_{s=m}^{\infty} \frac{C_s^2(W)}{s!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(s)}(\lambda)\, \mu(d\lambda, \theta^0). \tag{1.31}$$

Як було вказано у вступі нас особливо цікавить тригонометрична функція регресії

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} \left(A_k^0 \cos \varphi_k^0 t + B_k^0 \sin \varphi_k^0 t\right), \tag{1.32}$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, ..., \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, ..., A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0),$$

$(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $\ k = \overline{1, N}$. Розмістимо частоти $\varphi^0 = (\varphi_1^0, ..., \varphi_N^0)$ у порядку зростання. Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин

$$\Phi_T \subset \Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}), \ \ T > T_0 > 0,$$

$$\Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \le \underline{\varphi} < \varphi_1 < ... < \varphi_N < \overline{\varphi} < \pi\},$$

стосовно яких припустимо, що вони містять істинне значення параметра φ^0 та задовольняють умовам

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{\substack{1\le j<k\le N \\ \varphi\in\Phi_T}} T(\varphi_k - \varphi_j) = +\infty, \tag{1.33}$$

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{\varphi\in\Phi_T} T\varphi_1 = +\infty. \tag{1.34}$$

Умови (1.33) та (1.34) – це умови розрізнення параметрів тригонометричної моделі регресії (1.1) та (1.32).

Позначимо

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \left[X(t) - g(t,\theta)\right]^2.$$

Означення 4. *Будемо називати о.н.к. параметра θ^0 у сенсі Уолкера [18] такий випадковий вектор*

$$\hat{\theta}_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{1T}, ..., A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{NT}),$$

що мінімізує функціонал $Q_T(\theta)$ на параметричній множині $\Theta_T \subset \mathbb{R}^{3N}$, в якій амплітуди A_k, B_k, $k = \overline{1,N}$, можуть набувати будь-які значення, а кутові частоти $\varphi \in \Phi_T^c$, де Φ_T^c – замикання множини Φ_T.

Коли $\underline{\varphi} > 0$, умова (1.34) виконується. Якщо $\underline{\varphi} = 0$ та $\Phi_T \subset \Phi(0, \overline{\varphi})$, то для виконання (1.33), (1.34) можемо взяти, наприклад, параметричні множини Φ_T, для яких

$$\inf_{\substack{1\le j<k\le N \\ \varphi\in\Phi_T}} (\varphi_k - \varphi_j) = T^{-1/2}, \quad \inf_{\varphi\in\Phi_T} \varphi_1 = T^{-1/2}.$$

Перевірку виконання умов **B1-B3** для тригонометричної функції регресії (1.32) додамо в наступних розділах.

2 Теорема редукції

В цьому розділі для загальної моделі регресії (1.1) ми доводимо теорему редукції, яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу о.н.к. в нелінійній моделі вивченням асимптотичного розподілу о.н.к. у деякій допоміжній лінійній моделі. Таким чином, вказана теорема редукції, фактично, є теоремою лінеаризації. Наприкінці розділу виконання умов теореми редукції перевірено для тригонометричної моделі регресії.

Означення 5. *О.н.к. невідомого параметра* $\theta^0 = (\theta_1^0, ..., \theta_q^0) \in \Theta_T$, $T > T_0$, *отриманої за спостереженнями* X_t, $t = \overline{1,T}$, *у моделі спостережень (1.1) називається будь-який вектор* $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_q) \in \Theta_T^c$, *де* Θ_T^c *– замикання множини* Θ_T, *для якого*

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta), \;\; Q_T(\theta) = \sum_{t=1}^{T} [X(t) - g(t,\theta)]^2. \tag{2.1}$$

Означення 5 узагальнює означення 4 о.н.к. в сенсі Уолкера для тригонометричної функції регресії (1.32). Існування хоча б одного означеного вище випадкового вектора випливає із теореми (3.10), стор. 270, роботи І. Пфанцагля [19], якщо $\min\limits_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta)$ досягається для кожного $\omega \in \Omega$.

Зробимо наступні припущення. Нехай функція регресії $g(t, \cdot) \in \mathbb{C}^2(\Theta_\gamma)$, $t \in \mathbb{N}$. Нехай $\underline{\lim}_{T\to\infty} T^{-1} d_{iT}^2(\theta) > 0$, $\theta \in \Theta$, $i = \overline{1,q}$. Позначимо

$$d_T^2(\theta) = diag(d_{iT}^2(\theta))_{i=1}^q,$$

$$g_{il}(t,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_l} g(t,\theta), \;\; i,l = \overline{1,q}, \tag{2.2}$$

$$d_{il,T}^2(\theta) = \sum_{t=1}^{T} g_{il}^2(t,\theta), \;\; i,l = \overline{1,q}. \tag{2.3}$$

Введемо нормовану о.н.к.

$$\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0). \tag{2.4}$$

Виконаємо заміну змінних $u = d_T(\theta^0)(\theta - \theta^0)$, $\theta \in \Theta_T^c$, яка відповідає нормуванню (2.4) у функції регресії та її похідних, і запишемо для $u \in U_T(\theta^0) = d_T(\theta^0)(\Theta_T^c - \theta^0)$

$$h(t,u) = g(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u),$$

$$H(t; u_1, u_2) = h(t, u_1) - h(t, u_2),$$

$$h_i(t,u) = g_i(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u), \;\; i = \overline{1,q},$$

$$H_i(t; u_1, u_2) = h_i(t, u_1) - h_i(t, u_2),$$

$$h_{il}(t,u) = g_{il}(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u), \;\; i,l = \overline{1,q}.$$

Будемо також використовувати позначення

$$V(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\}.$$

Припустимо, що для $R \geq 0$ і $T > T_0(R)$ виконується наступна умова на зростання похідних 1-го та 2-го порядків функції регресії.

B4. (i) $$\max_{t=\overline{1,T},\, u \in V^c(R) \cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_i(t,u)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq k^i(R) \cdot T^{-1/2}, \;\; i = \overline{1,q}; \qquad (2.5)$$

(ii) $$\max_{t=\overline{1,T},\, u \in V^c(R) \cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \leq k^{il}(R) \cdot T^{-1/2}, \;\; i,l = \overline{1,q}; \qquad (2.6)$$

(iii) $$\frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \leq \tilde{k}^{il} \cdot T^{-1/2}, \;\; i,l = \overline{1,q}. \qquad (2.7)$$

В умові **B4** припускається, що константи k^i, k^{il}, $\tilde{k}^{il}$, $i,l = \overline{1,q}$, можуть залежати від істинного значення параметра $\theta^0 \in \Theta$. Зауважимо також, що при $R = 0$ умова **B4(i)** перетворюється на умову **B3** розділу 1.

Введемо вектори

$$\Psi_T(u) = \left(\Psi_T^i(u)\right)_{i=1}^q,$$

$$\Psi_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta^0)}, \;\; i = \overline{1,q}, \qquad (2.8)$$

та

$$L_T(u) = \left(L_T^i(u)\right)_{i=1}^q,$$

$$L_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \left(\varepsilon_t - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t,\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l\right) \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}, \ \ i = \overline{1,q}. \tag{2.9}$$

Нормована о.н.к. $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u) = 0. \tag{2.10}$$

Вектор $L_T(u)$ відповідає допоміжній лінійній регресійній моделі

$$Z(t) = \sum_{i=1}^q g_i(t,\theta^0)\beta_i + \varepsilon_t, \ \ t = \overline{1,T}, \tag{2.11}$$

і система нормальних рівнянь

$$L_T(u) = 0 \tag{2.12}$$

задає нормовану о.н.к. $\tilde{u}_T$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$, якщо ми покладемо

$$\tilde{u}_T = d_T(\theta^0)(\tilde{\beta}_T - \beta), \tag{2.13}$$

де $\tilde{\beta}_T$ – звичайна о.н.к. параметра β моделі (2.11).

Теорема 3. *Якщо виконуються умови **A1**, **A2**, а також умова **B4**, то для довільних $R > 0$, $r > 0$*

$$\mathbb{P}\{\max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r\} \to 0, \ \ T \to \infty. \tag{2.14}$$

Доведення. Для довільного $i = \overline{1,q}$

$$\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T H(t;0,u) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta^0)} -$$

$$- \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t,\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^{T} H(t;0,u) \frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \left[H(t;0,u) + \sum_{l=1}^{q} \frac{g_l(t,\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right] = s_1(u) + s_2(u) + s_3(u). \quad (2.15)$$

Для фіксованого $u \in V^c(R)$ маємо

$$\mathbb{E}s_1^2(u) = \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)^2 = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} \frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot \frac{H_i(s;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)} \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s \leq$$

$$\leq \max_{t=\overline{1,T}} \frac{H_i^2(t;u,0)}{d_{iT}^2(\theta^0)} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} \left| \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s \right|. \quad (2.16)$$

Використовуючи формулу скінченних приростів та умову **B4**, отримуємо

$$\max_{t=\overline{1,T}} \frac{|H_i(t;u,0)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq \sum_{l=1}^{q} \max_{u \in V^c(R),\, t=\overline{1,T}} \frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} |u_l| =$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \max_{u \in V^c(R),\, t=\overline{1,T}} \frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \cdot \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} |u_l| \leq R \left(\sum_{l=1}^{q} k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right) T^{-1}. \quad (2.17)$$

Тоді

$$\mathbb{E}s_1^2(u) \leq R^2 \left(\sum_{l=1}^{q} k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right)^2 T^{-2} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} \left| \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s \right|.$$

Доведемо, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} |\mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s| \to 0, \ \ T \to \infty. \quad (2.18)$$

За умов **A1**, **A2**

$$|\mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G)}{k!} B^k(t-s) \right| \leq \mathbb{E}G^2(\xi_0) |B(t-s)|, \quad (2.19)$$

тобто для доведення (2.18) достатньо довести, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} |B(t-s)| \to 0, \ \ T \to \infty.$$

Нехай виконується умова **A2**. Зробимо наступну оцінку

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}|B(t-s)| = T^{-2}\sum_{t=-(T-1)}^{T-1}(T-|t|)|B(t)| =$$

$$= T^{-1}\sum_{t=-(T-1)}^{T-1}\left(1-|t|\cdot T^{-1}\right)|B(t)| \le T^{-1}\sum_{t=-(T-1)}^{T-1}|B(t)| =$$

$$= T^{-1}B(0) + 2T^{-1}\sum_{t=1}^{T-1}|B(t)|.$$

Запишемо мажоранту ряду. Якщо $\alpha = \min\limits_{0\le j\le r}\alpha_j \in (0,1)$, то при $t \ge 1$

$$|B(t)| \le t^{-\alpha};$$

$$\sum_{t=1}^{T-1}|B(t)| \le \sum_{t=1}^{T-1}t^{-\alpha} \le \int\limits_0^T t^{-\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\Big|_0^T = T^{1-\alpha}.$$

Продовжимо оцінку

$$T^{-1}B(0) + 2T^{-1}\sum_{t=1}^{T-1}|B(t)| \le T^{-1} + \frac{2}{1-\alpha}T^{-1}T^{1-\alpha} =$$

$$= T^{-1} + \frac{2}{1-\alpha}T^{-\alpha} = O(T^{-\alpha}) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тоді отримуємо, що $s_1(u) \xrightarrow{P} 0$ при $T \to \infty$ поточково для $u \in V^c(R)$. З іншого боку,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{\|u_1-u_2\|\le h}|s_1(u_1)-s_1(u_2)| > r\right\} \le r^{-1}\mathbb{E}\max_{\|u_1-u_2\|\le h}\left|\sum_{t=1}^{T}\varepsilon\frac{H_i(t;u_1,u_2)}{d_{iT}(\theta^0)}\right| \le$$

$$\le r^{-1}\max_{\|u_1-u_2\|\le h}\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|H_i(t;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta^0)}\mathbb{E}\,|\varepsilon_0|\,T. \tag{2.20}$$

Використовуючи умову **B4**, маємо

$$\max_{\|u_1-u_2\|\le h}\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|H_i(t;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta^0)} \le$$

$$\le h\left[\sum_{l=1}^{q}\max_{u\in V^c(R),t=\overline{1,T}}\frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{il,T}(\theta^0)}\cdot\frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\right] \le h\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}(R)\cdot\tilde{k}^{il}\right)T^{-1}. \tag{2.21}$$

Із (2.21) випливає нерівність

$$\mathbb{P}\left\{\max_{\|u_1-u_2\|\le h}|s_1(u_1)-s_1(u_2)|>r\right\}\le k_1r^{-1}h, \qquad (2.22)$$

де

$$k_1=\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}(R)\tilde{k}^{il}\right)\mathbb{E}\left|\varepsilon_0\right|.$$

Позначимо N_h скінченну h-сітку кулі $V^c(R)$. Тоді

$$\max_{u\in V^c(R)}|s_1(u)|\le\max_{\|u_1-u_2\|\le h}|s_1(u_1)-s_1(u_2)|+\max_{u\in N_h}|s_1(u)|. \qquad (2.23)$$

З (2.20), (2.21) маємо для будь-якого $r>0$

$$\mathbb{P}\left\{\max_{u\in V^c(R)}|s_1(u)|>r\right\}\le 2k_1r^{-1}h+\mathbb{P}\left\{\max_{u\in N_h}|s_1(u)|>\frac{r}{2}\right\}. \qquad (2.24)$$

Для $\varepsilon>0$ задамо $h=\frac{\varepsilon r}{4k_1}$. Тоді для $T>T_0$ завдяки поточковій збіжності $s_1(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{u\in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_1}}}|s_1(u)|>\frac{r}{2}\right\}\le\frac{\varepsilon}{2},$$

і, таким чином,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{u\in V^c(R)}|s_1(u)|>r\right\}\le\varepsilon.$$

Отже, $s_1(u)$ збігається рівномірно за $u\in V^c(R)$ до нуля за ймовірністю.

При застосуванні формули скінченних приростів, нерівності Коші-Буняковського та умови **B4**, отримуємо

$$\max_{u\in V^c(R)}\max_{t=\overline{1,T}}|H(t;0,u)|=\max_{u\in V^c(R)}\max_{t=\overline{1,T}}\left|\sum_{i=1}^{q}\frac{h_i(t,u_t^*)}{d_{iT}(\theta^0)}u_i\right|\le$$

$$\le R\left[\max_{u\in V^c(R),t=\overline{1,T}}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta^0)}\right)^2\right]^{1/2}\le\|k(R)\|\cdot R\cdot T^{-1/2}, \qquad (2.25)$$

де $k(R)=\big(k^1(R),...,k^q(R)\big)$. Тоді, за допомогою (2.17) та (2.25), можемо записати

$$\max_{u\in V^c(R)}|s_2(u)|=\max_{u\in V^c(R)}\left|\sum_{t=1}^{T}H(t;0,u)\frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)}\right|\le$$

$$\leq T \max_{u\in V^c(R)} \max_{t=\overline{1,T}} \left| H(t;0,u)\frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq T^{-1/2}\cdot R^2 \cdot \|k(R)\| \cdot \left(\sum_{l=1}^{q} k^{il}(R)\tilde{k}^{il} \right),$$

а, отже, $s_2(u)$ рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \to \infty$ збігається до 0.

Зауважимо, що $s_3(u)$ можна переписати у вигляді

$$s_3(u) = \sum_{t=1}^{T} \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \left[H(t;0,u) + \sum_{l=1}^{q} \frac{g_l(t,\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \sum_{l,j=1}^{q} \frac{h_{lj}(t,u_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)d_{jT}(\theta^0)} u_l u_j =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{q} \left(\frac{h_{lj}(t,u_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)d_{jT}(\theta^0)} \cdot \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right) u_l u_j, \;\; u_t^* \in V(R).$$

Тоді за умови **B4**,

$$\max_{u\in V^c(R)} |s_3(u)| \leq \frac{T}{2} \cdot k^i(R) \cdot \max_{u\in V^c(R)} \left(\sum_{l,j=1}^{q} k^{lj}(R)\tilde{k}^{lj} |u_l||u_j| \right) \cdot T^{-3/2} \leq$$

$$\leq \frac{qk^i(R)}{2} \cdot \max_{1\leq l,j\leq q} \left[k^{lj}(R)\tilde{k}^{lj} \right] \cdot R^2 \cdot T^{-1/2}.$$

Отже, $s_3(u)$ рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \to \infty$ збігається до 0. ■

Зауваження 1. Твердження теореми 3 є вірним для о.н.к. $\hat{\theta}_T$ із означення 4.

Дійсно, перевіримо виконання умови **B4** для досліджуваної нами функції регресії (1.32), тобто для

$$g(t,\theta^0) = \sum_{k=1}^{N} \left(A_K^0 \cos\varphi_k^0 t + B_K^0 \sin\varphi_k^0 t \right),$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, ..., \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, ..., A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0).$$

Легко побачити, що

$$g_{3k-2}(t,\theta^0) = \frac{\partial}{\partial A_k^0} g(t,\theta^0) = \cos\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k-1}(t,\theta^0) = \frac{\partial}{\partial B_k^0} g(t,\theta^0) = \sin\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k}(t,\theta^0)=\frac{\partial}{\partial\varphi_k^0}g(t,\theta^0)=-A_k^0 t\sin\varphi_k^0 t+B_k^0 t\cos\varphi_k^0 t,\ \ k=\overline{1,N}, \tag{2.26}$$

$$g_{3k-2,3k}(t,\theta^0)=g_{3k,3k-2}(t,\theta^0)=\frac{\partial^2}{\partial A_k^0\partial\varphi_k^0}g(t,\theta^0)=-t\sin\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k-1,3k}(t,\theta^0)=g_{3k,3k-1}(t,\theta^0)=\frac{\partial^2}{\partial B_k^0\partial\varphi_k^0}g(t,\theta^0)=t\cos\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k,3k}(t,\theta^0)=\frac{\partial^2}{(\partial\varphi_k^0)^2}g(t,\theta^0)=-A_k^0 t^2\cos\varphi_k^0 t-B_k^0 t^2\sin\varphi_k^0 t,$$

$$g_{3k-1,3k-2}(t,\theta^0)=g_{3k-2,3k-1}(t,\theta^0)=$$

$$=g_{3k-1,3k-1}(t,\theta^0)=g_{3k-2,3k-2}(t,\theta^0)=0,\ \ k=\overline{1,N}. \tag{2.27}$$

Далі отримуємо

$$d^2_{3k-2,T}(\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}g^2_{3k-2}(t,\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}\cos^2\varphi_k^0 t=\frac{T}{2}+\frac{\cos{(T+1)}\varphi_k^0\sin T\varphi_k^0}{2\sin\varphi_k^0}, \tag{2.28}$$

$$d^2_{3k-1,T}(\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}g^2_{3k-1}(t,\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}\sin^2\varphi_k^0 t=\frac{T}{2}-\frac{\cos{(T+1)}\varphi_k^0\sin T\varphi_k^0}{2\sin\varphi_k^0}, \tag{2.29}$$

$$d^2_{3k,T}(\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}g^2_{3k}(t,\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}\left(-A_k^0 t\sin\varphi_k^0 t+B_k^0 t\cos\varphi_k^0 t\right)^2=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\Big[\left(A_k^0 t\sin\varphi_k^0 t\right)^2+\left(B_k^0 t\cos\varphi_k^0 t\right)^2-2A_k^0B_k^0t^2\sin\varphi_k^0 t\cos\varphi_k^0 t\Big]=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\left[{A_k^0}^2t^2\frac{1-\cos 2\varphi_k^0 t}{2}+{B_k^0}^2t^2\frac{1+\cos 2\varphi_k^0 t}{2}-A_k^0B_k^0t^2\sin 2\varphi_k^0 t\right]=$$

$$=\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+{A_k^0}^2\sum_{t=1}^{T}\frac{-t^2\cos 2\varphi_k^0 t}{2}+{B_k^0}^2\sum_{t=1}^{T}\frac{t^2\cos 2\varphi_k^0 t}{2}-$$

$$-A_k^0B_k^0\sum_{t=1}^{T}t^2\sin 2\varphi_k^0 t=\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+O(T^2). \tag{2.30}$$

Аналогічно

$$d^2_{3k-2,3k;T}(\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}g^2_{3k-2,3k}(t,\theta^0)=\sum_{t=1}^{T}t^2\sin^2\varphi_k^0 t=$$

$$= \sum_{t=1}^{T} t^2 \frac{1-\cos 2\varphi_k^0 t}{2} = \frac{T^3}{6} + \sum_{t=1}^{T} \frac{-t^2\cos 2\varphi_k^0 t}{2} = \frac{T^3}{6} + O(T^2), \tag{2.31}$$

$$d^2_{3k-1,3k;T}(\theta^0) = \sum_{t=1}^{T} g^2_{3k-1,3k}(t,\theta^0) = \sum_{t=1}^{T} t^2\cos^2\varphi_k^0 t =$$

$$= \frac{T^3}{6} + \sum_{t=1}^{T} \frac{t^2\cos 2\varphi_k^0 t}{2} = \frac{T^3}{6} + O(T^2), \tag{2.32}$$

$$d^2_{3k,3k;T}(\theta^0) = \sum_{t=1}^{T} g^2_{3k,3k}(t,\theta^0) = \sum_{t=1}^{T} \left(-A_k^0 t^2\cos\varphi_k^0 t - B_k^0 t^2 \sin\varphi_k^0 t\right)^2 =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \left({A_k^0}^2 t^4\cos^2\varphi_k^0 t + {B_k^0}^2 t^4 \sin^2\varphi_k^0 t + A_k^0 B_k^0 t^4 \sin 2\varphi_k^0 t\right) =$$

$$= \frac{T^5}{10}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + {A_k^0}^2 \sum_{t=1}^{T} \frac{t^4\cos 2\varphi_k^0 t}{2} - {B_k^0}^2 \sum_{t=1}^{T} \frac{t^4\cos 2\varphi_k^0 t}{2} +$$

$$+ A_k^0 B_k^0 \sum_{t=1}^{T} t^4 \sin 2\varphi_k^0 t = \frac{T^5}{10}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + O(T^4). \tag{2.33}$$

Застосуємо (2.26)-(2.33) і побачимо, що

$$\max_{t=\overline{1,T},\, u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_{3k-2}(t,u)|}{d_{3k-2,T}(\theta^0)} =$$

$$= \max_{t=\overline{1,T},\, u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)} \frac{\left|\cos\left(\varphi_k^0 + d^{-1}_{3k,T}(\theta^0)u_{3k}\right)t\right|}{\sqrt{\frac{T}{2} + \frac{\cos{(T+1)\varphi_k^0}\sin T\varphi_k^0}{2\sin\varphi_k^0}}} = O(T^{-1/2}).$$

Аналогічно

$$\max_{t=\overline{1,T},\, u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_{3k-1}(t,u)|}{d_{3k-1,T}(\theta^0)} =$$

$$= \max_{t=\overline{1,T},\, u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)} \frac{\left|\sin\left(\varphi_k^0 + d^{-1}_{3k,T}(\theta^0)u_{3k}\right)t\right|}{\sqrt{\frac{T}{2} - \frac{\cos{(T+1)\varphi_k^0}\sin T\varphi_k^0}{2\sin\varphi_k^0}}} = O(T^{-1/2}),$$

$$\max_{t=\overline{1,T},\, u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_{3k}(t,u)|}{d_{3k,T}(\theta^0)} =$$

$$= \max_{t=\overline{1,T},\, u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)} \frac{\Big| -\left(A_k^0 + d^{-1}_{3k-2,T}(\theta^0)u_{3k-2}\right) t \sin\left(\varphi_k^0 + d^{-1}_{3k,T}(\theta^0)u_{3k}\right)t}{\sqrt{\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + O(T^2)}} +$$

$$+\frac{\left(B_k^0+d_{3k-1,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k-1}\right)t\cos\left(\varphi_k^0+d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k}\right)t\Big|}{\sqrt{\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+O(T^2)}}\le$$

$$\le\max_{u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\frac{T\left(\left|A_k^0\right|+\left|d_{3k-2,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k-2}\right|+\left|B_k^0\right|+\left|d_{3k-1,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k-1}\right|\right)}{\sqrt{\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+O(1)}}=$$

$$=O(T^{-1/2}),$$

отже, **B4(i)** виконується.

Так само

$$\max_{t=\overline{1,T},\,u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\frac{|h_{3k,3k-2}(t,u)|}{d_{3k,3k-2;T}(\theta^0)}=$$

$$=\max_{t=\overline{1,T},\,u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\frac{\left|t\sin\left(\varphi_k^0+d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k}\right)t\right|}{\sqrt{\frac{T^3}{6}+O(T^2)}}\le$$

$$\le\frac{T}{\sqrt{\frac{T^3}{6}+O(1)}}=O(T^{-1/2});$$

$$\max_{t=\overline{1,T},\,u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\frac{|h_{3k,3k-1}(t,u)|}{d_{3k,3k-1;T}(\theta^0)}=$$

$$=\max_{t=\overline{1,T},\,u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\frac{\left|t\cos\left(\varphi_k^0+d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k}\right)t\right|}{\sqrt{\frac{T^3}{6}+O(T^2)}}=O(T^{-1/2});$$

$$\max_{t=\overline{1,T}}\max_{u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\frac{|h_{3k,3k}(t,u)|}{d_{3k,3k;T}(\theta^0)}\le$$

$$\le\max_{t=\overline{1,T},\,u\in V^c(R)\cap U_T(\theta^0)}\left(\frac{\left|\left(A_k^0+d_{3k-2,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k-2}\right)t^2\cos\left(\varphi_k^0+d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k}\right)t\right|}{\sqrt{\frac{T^5}{10}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+O(T^4)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left|\left(B_k^0+d_{3k-1,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k-1}\right)t^2\sin\left(\varphi_k^0+d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)u_{3k}\right)t\right|}{\sqrt{\frac{T^5}{10}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+O(T^4)}}\right)\le$$

$$\le\frac{T^2\left(\left|A_k^0\right|+\left|B_k^0\right|+O(T^{-1/2})\right)}{\sqrt{\frac{T^5}{10}\left({A_k^0}^2+{B_k^0}^2\right)+O(1)}}=O(T^{-1/2}),$$

і **B4(ii)** виконується. До того ж, виконання **B4(iii)** випливає з наступних співвідношень:

$$\frac{d_{3k-2,3k;T}(\theta^0)}{d_{3k-2,T}(\theta^0)d_{3k,T}(\theta^0)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{T^3}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T}{2} + \frac{\cos{(T+1)\varphi_k^0}\sin{T\varphi_k^0}}{2\sin{\varphi_k^0}}}\sqrt{\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + O(T^2)}} = O(T^{-1/2});$$

$$\frac{d_{3k-1,3k;T}(\theta^0)}{d_{3k-1,T}(\theta^0)d_{3k,T}(\theta^0)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{T^3}{6} + O(T^2)}}{\sqrt{\frac{T}{2} - \frac{\cos{(T+1)\varphi_k^0}\sin{T\varphi_k^0}}{2\sin{\varphi_k^0}}}\sqrt{\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + O(T^2)}} = O(T^{-1/2});$$

$$\frac{d_{3k,3k;T}(\theta^0)}{d_{3k,T}(\theta^0)d_{3k,T}(\theta^0)} = \frac{\sqrt{\frac{T^5}{10}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + O(T^4)}}{\frac{T^3}{6}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) + O(T^2)} = O(T^{-1/2}).$$

Звідси, для досліджуваної нами функції регресії умова **B4** виконується, тому можна сформулювати

Наслідок 1. Якщо виконано умови **A1**, **A2**, то для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32) є вірним співвідношення (2.14) теореми 3.

3 Асимптотична єдиність оцінки найменших квадраів

В даному розділі буде доведено, що з ймовірністю, яка прямує до 1 при $T \to \infty$, нормована о.н.к. $\hat{u}_T$ з (2.4), де о.н.к. $\hat{\theta}_T$ задано означеннями 4 та 5, є єдиним розвязком системи рівнянь (2.10). Цей факт використаємо у розділі 4 при доведенні асимптотичної нормальності о.н.к. $\hat{\theta}_T$.

Запишемо

$$J_T(\theta) = \Big(J_{il,T}(\theta)\Big)_{i,l=1}^{q}, \quad J_{il,T}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \sum_{t=1}^{T} g_i(t,\theta) g_l(t,\theta), \tag{3.1}$$

$\lambda_{\min}(A)(\lambda_{\max}(A))$ – найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A.

B5. Для деякого $\lambda_* > 0$ при $T > T_0$

$$\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*. \tag{3.2}$$

Розглянемо нормовану о.н.к.

$$\hat{w}_T = T^{-1/2} d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0), \tag{3.3}$$

якій відповідає заміна змінних $w = T^{-1/2} d_T(\theta^0)(\theta - \theta^0)$ у функції регресії та її похідних.

Введемо позначення

$$f(t,w) = g(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_i(t,w) = g_i(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_{il}(t,w) = g_{il}(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w), \;\; i,l = \overline{1,q}.$$

Також використаємо наступні позначення

$$F(t; w_1, w_2) = f(t,w_1) - f(t,w_2), \;\; F_i(t; w_1, w_2) = f_i(t,w_1) - f_i(t,w_2),$$

$$F_{il}(t;w_1,w_2) = f_{il}(t,w_1) - f_{il}(t,w_2),\ \ \Phi_{il,T}(w,0) = \sum_{t=1}^{T} F_{il}^2(t;w,0),\ \ i,l=\overline{1,q}.$$

Введемо умову

B6. Для деякого $r_0 > 0$

$$\textbf{(i)} \quad \max_{t=\overline{1,T},\, w\in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t,w)|}{d_{iT}(\theta^0)} \le \hat{k}^i(r_0)\cdot T^{-1/2},\ \ i=\overline{1,q}; \tag{3.4}$$

$$\textbf{(ii)} \quad \max_{t=\overline{1,T},\, w\in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t,w)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \le \hat{k}^{il}(r_0)\cdot T^{-1/2},\ \ i,l=\overline{1,q}; \tag{3.5}$$

$$\textbf{(iii)} \quad \max_{w\in V^c(r_0)} \frac{T\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta^0) d_{lT}^2(\theta^0)} \|w\|^{-2} \le \hat{k}_{il}(r_0),\ \ i,l=\overline{1,q}. \tag{3.6}$$

Звернемо увагу на те, що нерівності (3.4) та (3.5) є модифікаціями нерівностей (2.5) та (2.6) з умови **B4**, відповідно.

Розглянемо функціонал

$$(2T)^{-1}\sum_{t=1}^{T}[X(t)-f(t,w)]^2 = \frac{1}{2}Q_T(\theta^0 + T^{1/2}d_T^{-1}(\theta^0)w) \tag{3.7}$$

і введемо вектор

$$\mathcal{M}_T(w) = \left(\mathcal{M}_T^i(w)\right)_{i=1}^q = \left(\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{1}{2}Q_T(\theta^0 + T^{1/2}d_T^{-1}(\theta^0)w)\right)\right)_{i=1}^q =$$

$$= \left(T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T}[X(t)-f(t,w)]\cdot\frac{-f_i(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)}\right)_{i=1}^q .$$

Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathcal{M}_T(w) = 0. \tag{3.8}$$

Варто зауважити, що якщо нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8), тоді $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.10).

Ми будемо вимагати, що нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є слабко консистентною, тобто виконується умова

C. Для будь-якого $r > 0$ $\mathbb{P}\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\} \to 0,\ T\to\infty$.

Достатні умови слабкої консистентності для тригонометричної моделі з неперервним часом спостереження містяться в роботі [8].

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* ***A1***, ***A2*** *та* ***B4(iii)***, ***B5***, ***B6***, ***C***. *Тоді нормована о.н.к.* $\hat{w}_T$ *з ймовірністю, що прямує до* 1 *при* $T \to \infty$, *є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8).*

Доведення. Розглянемо загальний елемент матриці Гессе функціонала (3.7) $\mathcal{H}_T = \left(\mathcal{H}_T^{il}(w)\right)_{i,l=1}^{q}$:

$$\mathcal{H}_T^{il}(w) = \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l}\left(\frac{1}{2}Q_T(\theta^0 + T^{1/2}d_T^{-1}(\theta^0)w\right) =$$

$$= T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left([X(t) - f(t,w)] \cdot \frac{-f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}T + \frac{f_i(t,w)f_l(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}T\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}[F(t;0,w) + \varepsilon_t] \cdot \frac{-f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^{T}\frac{f_i(t,w)f_l(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}F(t;w,0) \cdot \frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} - \sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T}\frac{(f_i(t,w) - f_i(t,0) + f_i(t,0)) \cdot (f_l(t,w) - f_l(t,0) + f_l(t,0))}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} =$$

$$= s_1(w) + s_2(w) + \sum_{t=1}^{T}\frac{(f_i(t,w) - f_i(t,0)) \cdot (f_l(t,w) - f_l(t,0))}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T}\frac{(f_i(t,w) - f_i(t,0)) \cdot f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^{T}\frac{(f_l(t,w) - f_l(t,0)) \cdot f_i(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T}\frac{f_i(t,0)f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} =$$

$$= s_1(w) + s_2(w) + s_3(w) + s_4(w) + s_5(w) + J_{il,T}(\theta^0), \quad i,l = \overline{1,q}. \tag{3.9}$$

Використовуючи нерівність (її доведення наведено у [20], стор.103)

$$\left|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))\right| \le q \cdot \max_{1\le i,l\le q}\left|\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)\right|, \tag{3.10}$$

отримуємо

$$\max_{1\le i,l\le q}\left|\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)\right| \le \sum_{m=1}^{5}\max_{1\le i,l\le q}|s_m(w)|. \tag{3.11}$$

Застосовуючи умови теореми, одержуємо для $\|w\| \le r_0$

$$|s_1(w)| = \left| \sum_{t=1}^{T} F(t;w,0) \cdot \frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \le$$

$$\le T \max_{t=\overline{1,T}} \left| F(t;w,0) \cdot \frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \le T \cdot \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot T^{-1} \cdot \max_{t=\overline{1,T}} |F(t;w,0)| \le$$

$$\le \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot T^{-1} \cdot \max_{t=\overline{1,T}} |f(t,w) - f(t,0)| =$$

$$= \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot T^{-1} \cdot \max_{t=\overline{1,T}} \left| T^{1/2} \sum_{l=1}^{q} \frac{f_l(t,w_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)} w_l \right| \le$$

$$\le \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot T^{1/2} \cdot \left(\sum_{l=1}^{q} \max_{t=\overline{1,T}} \left(\frac{f_l(t,w_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \|w\| \le$$

$$\le \|\hat{k}(r_0)\| \cdot \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot \|w\|, \tag{3.12}$$

$\hat{k}(r_0) = \left(\hat{k}_1(r_0), ..., \hat{k}_q(r_0) \right)$, $\|w_t^*\| \le \|w\|$, $t = \overline{1,T}$.

Далі розглянемо

$$|s_2(w)| = \left| \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| =$$

$$= \left| \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \frac{F_{il}(t,w,0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \frac{f_{il}(t,0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \le$$

$$\le |s_6(w)| + |s_7(w)|. \tag{3.13}$$

Із умови **B6(iii)** отримуємо

$$|s_6(w)| = \left| \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \frac{F_{il}(t,w,0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \le$$

$$\le \left(T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} \cdot \left(T \frac{\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta^0) d_{lT}^2(\theta^0)} \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} \cdot \hat{k}_{il}^{1/2}(r_0) \cdot \|w\|. \tag{3.14}$$

Тепер маємо

$$\left(T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} = \left(T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \left(\varepsilon_t^2 - \mathbb{E}\varepsilon_0^2 \right) + \mathbb{E}\varepsilon_0^2 \right)^{1/2} = \left(\xi_T + \mathbb{E}\varepsilon_0^2 \right)^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\xi_T^2 = T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\left(\mathbb{E}\varepsilon_t^2\varepsilon_s^2 - \left(\mathbb{E}\varepsilon_0^2\right)^2\right).$$

Доведемо, що

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\mathbb{E}\varepsilon_t^2\varepsilon_s^2 \to \left(\mathbb{E}\varepsilon_0^2\right)^2, \ \ T\to\infty. \tag{3.15}$$

За умови **A1** функцію $G^2(x)$ можна розкласти в ряд в гільбертовому просторі $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$ за поліномами Чебишова-Ерміта:

$$G^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(G^2)}{k!}H_k(x),$$

$$C_k(G^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(x)H_k(x)\phi(x)\,dx, \ \ k\geq 0.$$

Таким чином,

$$\mathbb{E}\varepsilon_t^2\varepsilon_s^2 - \left(\mathbb{E}\varepsilon_0^2\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^2(G^2)}{k!}B^k(t-s) - \left(\mathbb{E}\varepsilon_0^2\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^2(G^2)}{k!}B^k(t-s) \leq |B(t-s)|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^2(G^2)}{k!}. \tag{3.16}$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^2(G^2)}{k!} = \mathbb{E}G^4(\xi(0)) - \left(\mathbb{E}G^2(\xi(0))\right)^2 = \mathbb{D}G^2(\xi(0)) < \infty, \tag{3.17}$$

то із (3.16), (3.17) та (2.18), маємо при $T\to\infty$

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\mathbb{E}\varepsilon_t^2\varepsilon_s^2 - \left(\mathbb{E}\varepsilon_0^2\right)^2 \leq \mathbb{D}G^2(\xi(0))T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}|B(t-s)| \to 0,$$

як було доведено у розіділі 2. Введемо наступне позначення

$$\xi_T = o_p^{(1)}(1) \xrightarrow{P} 0, \ \ T\to\infty. \tag{3.18}$$

Далі, опираючись на умови **B6**, отримуємо

$$\mathbb{E}|s_7(w)|^2 = \mathbb{E}\left|\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\frac{f_{il}(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\right|^2 \leq$$

$$\le \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}|\mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s|\cdot\left(\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|f_{il}(t,0)|}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\right)^2 \le$$

$$\le \left(\hat{k}^{il}(r_0)\cdot\tilde{k}^{il}\right)^2\cdot\mathbb{D}G(\xi(0))\cdot T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}|B(t-s)|, \qquad (3.19)$$

звідси,

$$|s_7(w)| = o_p^{(2)}(1) \xrightarrow{P} 0,\ \ T\to\infty. \qquad (3.20)$$

Продовжимо далі оцінювати доданки суми (3.9). Отримуємо

$$|s_3(w)| = \left|\sum_{t=1}^{T}\frac{(f_i(t,w)-f_i(t,0))\cdot(f_l(t,w)-f_l(t,0))}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\right| \le$$

$$\le T\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|f_{ij}(t,w_{1t}^*)|}{d_{iT}(\theta^0)d_{jT}(\theta^0)}\cdot\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|f_{ls}(t,w_{2t}^*)|}{d_{lT}(\theta^0)d_{sT}(\theta^0)}\cdot|w_j|\cdot|w_s| \le$$

$$\le T\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|f_{ij}(t,w_{1t}^*)|}{d_{ij,T}(\theta^0)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{jT}(\theta^0)}\times$$

$$\times\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|f_{ls}(t,w_{2t}^*)|}{d_{ls,T}(\theta^0)}\cdot\frac{d_{ls,T}(\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)d_{sT}(\theta^0)}\cdot|w_j|\cdot|w_s| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{k}^{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}^{ij}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s=1}^{q}\left(\hat{k}^{ls}(r_0)\cdot\tilde{k}^{ls}\right)^2\right)^{1/2}\|w\|^2, \qquad (3.21)$$

$\|w_{1t}^*\|$, $\|w_{2t}^*\|\le\|w\|$, $t=\overline{1,T}$.

Аналогічно з умов **B4** та **B6** випливає, що

$$|s_4(w)| = \left|\sum_{t=1}^{T}\frac{(f_i(t,w)-f_i(t,0))\cdot f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\right| \le$$

$$\le T^{3/2}\sum_{j=1}^{q}|w_j|\cdot\max_{t=\overline{1,T}}\frac{|f_{ij}(t,w_T^*)|}{d_{ij,T}(\theta^0)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{jT}(\theta^0)}\cdot\frac{|f_l(t,0)|}{d_{lT}(\theta^0)} \le$$

$$\le \hat{k}^l(r_0)\cdot\left(\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{k}^{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}^{ij}\right)^2\right)^{1/2}\cdot\|w\|. \qquad (3.22)$$

Таким же чином для $|s_5(w)|$ отримуємо

$$|s_5(w)| \le \hat{k}^i(r_0)\cdot\left(\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{k}^{lj}(r_0)\cdot\tilde{k}^{lj}\right)^2\right)^{1/2}\cdot\|w\|. \qquad (3.23)$$

Звідси, враховуючи (3.10)-(3.23), бачимо, що

$$\left|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))\right| \leq$$

$$\leq q \cdot \max_{1\leq i,l\leq q}\left(\|\hat{k}(r_0)\| \cdot \hat{k}^{il} \cdot \tilde{k}^{il} \cdot \|w\| + \left(o_p^{(1)}(1) + \mathbb{E}\varepsilon_0^2\right)^{1/2} \cdot \left(\hat{k}^{il}\right)^{1/2} \cdot \|w\| + \right.$$

$$+o_p^{(2)}(1) + \left(\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{k}^{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}^{ij}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s=1}^{q}\left(\hat{k}^{ls}(r_0)\cdot\tilde{k}^{ls}\right)^2\right)^{1/2} \cdot \|w\|^2 +$$

$$\left. +\hat{k}^{l}(r_0)\left(\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{k}^{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}^{ij}\right)^2\right)^{1/2} \cdot\|w\| + \hat{k}^{i}(r_0)\left(\sum_{j=1}^{q}\left(\hat{k}^{lj}(r_0)\cdot\tilde{k}^{lj}\right)^2\right)^{1/2} \cdot\|w\|\right). \tag{3.24}$$

Підставляючи в (3.24) нормовану о.н.к. $\hat{w}_T$, та беручи до уваги, що для $T > T_0$ за умови **B5** $J_T(\theta^0)$ – додатно визначена матриця з мінімальним власним числом $\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*$, для деякого $r > 0$ розглянемо подію

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| \leq r,\ \left|o_p^{(2)}(1)\right| \leq r,\ \|\hat{w}_T\| \leq r\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\left|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))\right| \leq \frac{\lambda_*}{2}\right\} =$$

$$= \left\{\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \leq \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \leq \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset \left\{\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \frac{\lambda_*}{2}\right\}. \tag{3.25}$$

Тепер, отримуємо

$$\mathbb{P}\left\{\overline{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3}\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\overline{\Gamma_1}\right\} + \mathbb{P}\left\{\overline{\Gamma_2}\right\} + \mathbb{P}\left\{\overline{\Gamma_3}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} + \mathbb{P}\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} + \mathbb{P}\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ та } \mathbb{P}\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

В такому разі, якщо для $T > T_0$ $\mathbb{P}\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за умови **C**, то

$$\mathbb{P}\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} + \mathbb{P}\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} + \mathbb{P}\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\} \leq \varepsilon,$$

а, значить, для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\left\{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3\right\} > 1 - \varepsilon. \qquad (3.26)$$

Таким чином, нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8), тому що матриця $\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)$ є додатно визначеною, і функціонал (3.7) має єдиний екстремум (мінімум) в точці $\hat{w}_T$. ■

Зауваження 2. Оскільки $-\frac{1}{T^{1/2}}\Psi(\hat{u}_T) = M_T(\hat{w}_T) = 0$, де $\hat{w}_T = T^{-1/2}\hat{u}_T$, $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$, то із єдиності оцінки $\hat{w}_T$ в кулі $V(r)$ з великою ймовірністю при $T > T_0$ для деякого $r > 0$ випливає єдиність оцінки $\hat{u}_T$ з такою ж ймовірністю для $T > T_0$ в кулі $V(T^{1/2}r)$.

Для тригонометричної функції регресії (1.32), перевіримо виконання умови **B6**.

Виконання **B6(iii)** є очевидним для наступних випадків, коли $i = l = 3k-1,\ \ i = l = 3k-2$, або $i = 3k-1,\ \ l = 3k-2$, або $i = 3k-2$, $l = 3k-1,\ \ g_{il}(t,\theta) = 0$, де $k = \overline{1,N}$.

Для випадків, коли $i = 3k,\ \ l = 3k-2$ та $i = 3k-2,\ \ l = 3k$, $k = \overline{1,N}$, використовуючи обчислення з попереднього розділу та беручи до уваги, що $w = (w_1, w_2, w_3, ..., w_{3N-2}, w_{3N-1}, w_{3N})$, отримуємо:

$$\frac{T\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)} = \frac{T}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)}\sum_{t=1}^{T}\left(f_{il}(t,w) - f_{il}(t,0)\right)^2 =$$

$$= \frac{T}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)}\sum_{t=1}^{T}\left(t\sin\left(\varphi_k^0 + T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\right)t - t\sin\varphi_k^0 t\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{4T}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)}\sum_{t=1}^{T}t^2\sin^2\left(\frac{t}{2}T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\right) \leq$$

$$\leq \frac{4T}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)}\sum_{t=1}^{T}t^2\left|w_{3k}\right|^2 \leq \hat{k}_{il}\|w\|^2. \qquad (3.27)$$

Аналогічно, для випадків, коли $i = 3k$, $l = 3k-1$ та $i = 3k-1$, $l = 3k$, $k = \overline{1, N}$,

$$\frac{T\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)} =$$

$$= \frac{T}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)} \sum_{t=1}^{T} \Big(t\cos\Big(\varphi_k^0 + T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\Big)t - t\cos\varphi_k^0 t\Big)^2 \le$$

$$\le \frac{4T}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)} \sum_{t=1}^{T} t^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\right) \le \hat{k}_{il}\|w\|^2. \tag{3.28}$$

Наостанок, для випадку $i = l = 3k$, $k = \overline{1, N}$,

$$\frac{T\Phi_{3k,3k,T}(w,0)}{d_{3k,T}^4(\theta^0)} = \frac{T}{d_{3k,T}^4(\theta^0)} \sum_{t=1}^{T} \left(f_{3k,3k}(t,w) - f_{3k,3k}(t,0)\right)^2 =$$

$$= \frac{T}{d_{3k,T}^4(\theta^0)} \sum_{t=1}^{T} t^4 \Big[A_k^0\big[\cos\Big(\varphi_k^0 + T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\Big)t - \cos\varphi_k^0 t\big] +$$

$$+ B_k^0\big[\sin\Big(\varphi_k^0 + T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\Big)t - \sin\varphi_k^0 t\big] +$$

$$+ T^{1/2}d_{3k-2,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k-2}\cdot\cos\Big(\varphi_k^0 + T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\Big)t +$$

$$+ T^{1/2}d_{3k-1,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k-1}\cdot\sin\Big(\varphi_k^0 + T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)w_{3k}\Big)t\Big]^2 \le$$

$$\le \frac{T}{d_{3k,T}^4(\theta^0)} \sum_{t=1}^{T} t^4 \Big[\left(\left|A_k^0\right| + \left|B_k^0\right|\right) T^{1/2}d_{3k,T}^{-1}(\theta^0)\left|w_{3k}\right| t +$$

$$+ T^{1/2}d_{3k-2,T}^{-1}(\theta^0)\left|w_{3k-2}\right| + T^{1/2}d_{3k-1,T}^{-1}(\theta^0)\left|w_{3k-1}\right|\Big]^2.$$

Застосовуючи нерівність $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$, отримуємо

$$\frac{T\Phi_{3k,3k,T}(w,0)}{d_{3k,T}^4(\theta^0)} \le \frac{3}{7}\left(\left|A_k^0\right| + \left|B_k^0\right|\right)^2 \frac{T^9}{d_{3k,T}^6(\theta^0)}\left|w_{3k}\right|^2 +$$

$$+ \frac{3}{5}\frac{T^7}{d_{3k,T}^4(\theta^0)d_{3k-2,T}^2(\theta^0)}\left|w_{3k-2}\right|^2 +$$

$$+ \frac{3}{5}\frac{T^7}{d_{3k,T}^4(\theta^0)d_{3k-1,T}^2(\theta^0)}\left|w_{3k-1}\right|^2 \le \hat{k}_{ii}\|w\|^2, \;\; i = 3k, \;\; k = \overline{1, N}. \tag{3.29}$$

Константи $\hat{k}_{il}$, $i, l = \overline{1, 3N}$, в правих частинах нерівностей (3.27)-(3.29) грають роль констант $\hat{k}_{il}(r_0)$ в умові **B6(iii)** при $q = 3N$ та не залежать від r_0.

Перевірка виконання нерівностей **B6(i)** та **B6(ii)** здійснюється аналогічно перевірці виконання умов **B4(i)** та **B4(ii)** розділу 2.

Виконання умови **B5** перевіримо за допомогою факту, наведеному в роботі [21]. Відповідно до нього, $J_T(\theta^0)$ для тригонометричної функції регресії (1.32) збігається до блочно-діагональної матриці $J(\theta^0)$ з блоками

$$J^k(\theta^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, N}. \qquad (3.30)$$

Дана матриця є додатно визначеною. З цього випливає, що існує деяке T_0 таке, що для $T > T_0$ матриця $J_T(\theta^0)$ є додатно визначеною, і умова **B5** виконується.

Наслідок 2. За умов **A1**, **A2** та **C** для тригонометричної функції регресії (1.32) є вірним твердження теореми 4.

4 Асимптотична нормальність оцінки найменших квадраів параметрів суми гармонічних коливань

В даному розділі доведемо теорему про асимптотичну нормальність о.н.к. $\hat{\theta}_T$, яку задано означеннями 4 та 5, параметра нелінійної моделі регресії (1.1) і застосуємо її для одержання асимптотичної нормальності о.н.к. $\hat{\theta}_T$ параметрів суми гармонічних коливань (1.32).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* ***A1****,* ***A2****,* ***A3*** *для* $W = G$*,* ***B1****,* ***B2****,* ***B4-B6****,* ***C****, та* $f(\lambda)$, $\lambda = [-\pi, \pi]$ *інтегровна за мірою* μ *у випадку* $m = 1$*. Тоді розподіл випадкового вектора* $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ *при* $T \to \infty$ *збігається до гауссівського розподілу* $N(0, \Gamma)$*, де*

$$\Gamma = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1}. \tag{4.1}$$

Доведення. Після використання (2.8), (2.9) та позначень розділу 1 отримуємо, що

$$L_T^i(u) = \sum_{t=1}^{T} \left(G(\xi_t) - \sum_{l=1}^{q} \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} = 0,$$

або

$$\sum_{t=1}^{T} G(\xi_t) \cdot \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} = \sum_{l=1}^{q} \sum_{t=1}^{T} \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} \cdot \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot u_l = \sum_{l=1}^{q} J_{il,T}(\theta^0) u_l, \;\; i = \overline{1, q}.$$

Таким чином, отримали систему рівнянь відносно u:

$$J_T(\theta^0) u = d_T^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^{T} G(\xi_t) \nabla g(t, \theta^0).$$

В наслідок цього, маємо

$$\tilde{u}_T = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_q \end{pmatrix} = \Lambda_T(\theta^0) \sum_{t=1}^{T} G(\xi_t) d_T^{-1}(\theta^0) \nabla g(t, \theta^0) = \Lambda_T(\theta^0)\zeta_T, \tag{4.2}$$

де $\Lambda_T(\theta^0) = J_T^{-1}(\theta^0)$.

Далі, взявши до уваги теорему 2, отримуємо, що випадковий вектор $\tilde{u}_T$ є асимптотично нормальним $N(0, \Gamma)$ при $T \to \infty$, де σ задана формулою (4.1). Зауважимо, що коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_T$, має вигляд

$$\Gamma_T = \Lambda_T(\theta^0) \cdot \sigma_T^2 \cdot \Lambda_T(\theta^0), \tag{4.3}$$

де σ_T^2 – коваріаційна матриця вектора ζ_T. При $T \to \infty$

$$\Gamma_T = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta^0) \Big)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta^0) \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta^0) \Big)^{-1} \to$$

$$\to 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \Big)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0) \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \Big)^{-1} = \Gamma. \tag{4.4}$$

Далі потрібно довести, що функція розподілу $G_T(y, \theta^0)$ випадкового вектору $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ збігається при $T \to \infty$ до гауссівської функції розподілу $\Phi_{0,\Gamma}(y) = \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y))$, $\Pi(y) = (-\infty, y_1) \times ... \times (-\infty, y_q)$, $y \in \mathbb{R}^q$.

Для довільного $r > 0$, покажемо, що

$$\Delta_T(r) = \mathbb{P}\left\{ \|\hat{u}_T - \tilde{u}_T\| > r \right\} \to 0, \ \ T \to \infty. \tag{4.5}$$

Введемо подію $A_T = \{\tilde{u}_T \in V^c(R - r)\}$, де R таке, що для $T > T_0$, в наслідок асимптотичної нормальності $\tilde{u}_T$, виконується $\mathbb{P}\{\overline{A}_T\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ – фіксоване достатньо мале число.

Також задамо подію

$$B_T = \left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) \cdot (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r \right\}.$$

З теореми 3 (редукції) випливає, що для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\left\{\overline{B}_T\right\} = \mathbb{P}\left\{\max_{u\in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0)\cdot(\Psi_T(u) - L_T(u))\| > r\right\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\left\{\lambda_{\max}(\Lambda_T(\theta^0))\cdot \max_{u\in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))}\cdot \max_{u\in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r\right\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\left\{\max_{u\in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| \ge \lambda_* r\right\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Крім того, розглянемо подію C_T, яка полягає в тому, що о.н.к. $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.7), до того ж, для $T > T_0$ $\mathbb{P}\{\overline{C}_T\} \le \frac{\varepsilon}{3}$ за теоремою 4. Таким чином, для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\left\{A_T \cap B_T \cap C_T\right\} \ge 1 - \varepsilon. \tag{4.6}$$

Далі маємо

$$\Lambda_T(\theta^0)L_T(u) =$$

$$= \Lambda_T(\theta^0)\left(\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \cdot \frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}\right)_{i=1}^{q} - \Lambda_T(\theta^0)\left(\sum_{l=1}^{q} u_l \sum_{t=1}^{T} \frac{g_l(t,\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)}\cdot\frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}\right)_{i=1}^{q} =$$

$$= \tilde{u}_T - \Lambda_T(\theta^0)\left(\sum_{l=1}^{q} u_l \cdot J_{il,T}(\theta^0)\right)_{i=1}^{q} = \tilde{u}_T - u.$$

Якщо подія $A_T \cap B_T \cap C_T$ відбулася, то для $u \in V^c(R)$

$$\|u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)\| = \|u + \Lambda_T(\theta^0)\left(\Psi_T(u) - L_T(u)\right) + \Lambda_T(\theta^0)L_T(u)\| =$$

$$= \|u + \tilde{u} - u + \Lambda_T(\theta^0)\left(\Psi_T(u) - L_T(u)\right)\| \le$$

$$\le \|\tilde{u}\| + \|\Lambda_T(\theta^0)\left(\Psi_T(u) - L_T(u)\right)\| \le R - r + r = R,$$

тобто $G_T(u) = u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)$ – неперервне відображення $V^c(R)$ в $V^c(R)$.

Для доведення (4.5) застосуємо теорему Брауера про нерухому точку [22], сформульовану в наступній формі.

Теорема (Брауера)**.** *Нехай F неперервне відображення $V^c(R)$ в себе. Тоді існує $x_0 \in V^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.*

Застосуємо дану теорему до $F_T(u)$, тоді отримуємо, що існує точка $u_T^0 \in V^c(R)$ така, що $F_T(u_T^0) = u_T^0$, або, в наслідок того, що $\Lambda_T(\theta^0)$ – невироджена, $\Psi_T(u_T^0) = 0$. Оскільки подія C_T виконується, то єдиним розв'язком системи рівнянь $\Psi_T(u) = 0$ в кулі $V^c(R)$ є нормована о.н.к. $\hat{u}_T$, тобто $\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \subset \{\hat{u}_T \in V^c(R)\}$ і $\mathbb{P}\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \geq 1 - \varepsilon$. Зауважимо, що з (4.6) випливає

$$1 - \varepsilon \leq \mathbb{P}\left\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap B_T\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap \left\{\max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) \cdot (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r\right\}\right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{\|\Lambda_T(\theta^0) \cdot (\Psi_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))\| \leq r\right\} = \mathbb{P}\left\{\|\Lambda_T(\theta^0) \cdot L_T(\hat{u}_T)\| \leq r\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\|\tilde{u}_T - \hat{u}_T\| \leq r\right\}. \tag{4.7}$$

Тоді з (4.7) випливає (4.5).

Нехай для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ – σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} \|x - y\| < \varepsilon\right\},$$

$$A_{-\varepsilon} = \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A)_\varepsilon.$$

Враховуючи (4.5), одержуємо для функції розподілу

$$G_T(y, \theta^0) = \mathbb{P}\left\{\hat{u}_T \in \Pi(y)\right\}, \ \ y \in \mathbb{R}^q,$$

та для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ і довільного $\varepsilon > 0$

$$G_T(y, \theta^0) \geq \mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\right\} - \Delta_T(\varepsilon), \tag{4.8}$$

$$G_T(y, \theta^0) \leq \mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{\varepsilon}\right\} + \Delta_T(\varepsilon). \tag{4.9}$$

Раніше було доведено, що для довільних $y \in \mathbb{R}^q$, $\varepsilon > 0$

$$\left|\mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{\pm\varepsilon}\right\} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{\pm\varepsilon})\right| \to 0, \ \ T \to \infty. \tag{4.10}$$

Нехай $\varphi(y,\theta^0)$ – гауссівська щільність, що відповідає функції розподілу $\Phi_{0,\Gamma}(y)$. Через те, що $\lambda_{\min}(\Gamma)=\underline{\lambda}>0$, $\lambda_{\max}(\Gamma)=\overline{\lambda}<\infty$, маємо

$$\varphi(y,\theta^0)\le(2\pi\underline{\lambda})^{-q/2}\cdot\exp\left\{\frac{-\|y\|^2}{2\overline{\lambda}}\right\}=\nu\left(\|y\|\right).$$

Тепер до $\nu\left(\|y\|\right)$ застосуємо наступну теорему [23].

Теорема. *Нехай ν – невід'ємна диференційовна функція на $[0,\infty)$ така, що*

$$(1)\quad b=\int\limits_0^{+\infty}|\nu'(\lambda)|\lambda^{q-1}\,d\lambda<\infty;$$

$$(2)\quad \lim_{\lambda\to\infty}\nu(\lambda)=0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C\in\mathfrak{B}^q$ та для довільних ε, $\delta>0$ має місце нерівність

$$\int_{C_\varepsilon\setminus C_{-\delta}}\nu\left(\|\lambda\|\right)\,d\lambda\le b\left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)}\right)(\varepsilon+\delta).$$

Після застосування даної теореми до $\nu\left(\|y\|\right)$, для будь-якого $\psi\neq0$ отримуємо

$$|\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y))-\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\psi)|=\int_\Pi\varphi(y,\theta^0)\,dy\le b\cdot\left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)}\right)\cdot|\psi|,\qquad(4.11)$$

де $\Pi=\begin{cases}\Pi(y)_\psi\setminus\Pi^c(y), & \text{якщо }\ \psi>0,\\ \Pi(y)\setminus\Pi(y)_\psi, & \text{якщо }\ \psi<0.\end{cases}$

Для будь-яких $y\in\mathbb{R}^q$ та для довільного $\varepsilon>0$

$$G_T(y,\theta^0)-\Phi_{0,\Gamma}(y)\le\Delta_T(\varepsilon)+\mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T\in\Pi(y)_\varepsilon\right\}-\Phi_{0,\Gamma}(y)\le$$

$$\le\Delta_T(\varepsilon)+\left|\mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T\in\Pi(y)_\varepsilon\right\}-\Phi_{0,\Gamma}(y)\right|\le$$

$$\le\Delta_T(\varepsilon)+\left|\mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T\in\Pi(y)_\varepsilon\right\}-\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon)\right|+$$

$$+\left|\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon)-\Phi_{0,\Gamma}(y)\right|;\qquad(4.12)$$

$$\Phi_{0,\Gamma}(y)-G_T(y,\theta^0)\le\Delta_T(\varepsilon)-\mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T\in\Pi(y)_{-\varepsilon}\right\}+\Phi_{0,\Gamma}(y)\le$$

$$\le \Delta_T(\varepsilon) + \left|\Phi_{0,\Gamma}(y) - \mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\right\}\right| \le$$

$$\le \Delta_T(\varepsilon) + \left|\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon}) - \mathbb{P}\left\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\right\}\right| +$$

$$+ \left|\Phi_{0,\Gamma}(y) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon})\right|. \tag{4.13}$$

Таким чином, зі співвідношень (4.6)-(4.13), отримуємо, що

$$G_T(y,\theta^0) \to \Phi_{0,\Gamma}(y),\ \ y \in \mathbb{R}^q,\ \ T \to \infty.\ \blacksquare$$

Нехай $g(t,\theta^0)$ має вигляд (1.32), тоді вона має блочно-діагональну спектральну міру $\mu(d\lambda,\theta^0)$ (див., наприклад, [21]) з блоками

$$\begin{pmatrix} \delta_k & i\rho_k & \overline{\beta}_k \\ -i\rho_k & \delta_k & \overline{\gamma}_k \\ \beta_k & \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

де

$$\beta_k = \frac{\sqrt{3}\left(B_k^0\delta_k + iA_k^0\rho_k\right)}{2\sqrt{A_k^{0\,2} + B_k^{0\,2}}},\ \ \gamma_k = \frac{\sqrt{3}\left(-A_k^0\delta_k + iB_k^0\rho_k\right)}{2\sqrt{A_k^{0\,2} + B_k^{0\,2}}}, \tag{4.15}$$

міра $\delta_k = \delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ зосереджені у точках $\pm\varphi_k^0$, причому

$$\delta_k\left(\{\pm\varphi_k^0\}\right) = \frac{1}{2},\ \ \rho_k\left(\{\pm\varphi_k^0\}\right) = \pm\frac{1}{2},\ \ k = \overline{1,N}.$$

Це означає, що умову **B1** для тригонометричної функції регресії (1.32) виконано.

За тотожністю Планшереля

$$\mu_T(\mathbb{R},\theta^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda,\theta^0) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu_T^{jl}(\lambda,\theta^0)\,d\lambda\right)_{j,l=1}^q =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_T^j(\lambda,\theta^0)\overline{g_T^l(\lambda,\theta^0)}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_T^j(\lambda,\theta^0)\right|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\left|g_T^j(\lambda,\theta^0)\right|^2 d\lambda\Big)^{-1/2} d\lambda\right)_{j,l=1}^q =$$

$$= \left(d_{jT}^{-1}(\theta^0)d_{lT}^{-1}(\theta^0)\sum_{t=1}^{T} g_j(t,\theta^0)g_l(t,\theta^0)\right)_{j,l=1}^q = \Big(J_{jl,T}(\theta^0)\Big)_{j,l=1}^q.$$

Таким чином, за умови **B1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda, \theta^0) = \Big(J_{jl,T}(\theta^0)\Big)_{j,l=1}^{q} = J_T(\theta^0),$$

і коли $T \to \infty$, то $J_T(\theta^0) \to J(\theta^0)$, де $J(\theta^0)$ деяка додатно визначена матриця, для якої $\lambda_{\min}(J(\theta^0)) \geq \tilde{\lambda}_* > 0$, і

$$J(\theta^0) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu^{jl}(d\lambda, \theta^0)\right)_{j,l=1}^{q} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta^0). \tag{4.16}$$

Для тригонометричної функції регресії (1.32) матрицю $J(\theta^0)$ задано виразом (3.30).

Варто зауважити, що для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32), використовуючи (4.14), (4.15), отримуємо, що матриця σ з теореми 2 розділу 1 є блочно-діагональною з блоками σ_k, $k = \overline{1, N}$, вигляду

$$\sigma_k = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k)}{n!} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & 1 \end{bmatrix} > 0. \tag{4.17}$$

Тепер можна сформулювати

Наслідок 3. За умов **A1**, **A2**, **A3** при $W = G$, справедливе твердження теореми 2 з блочно-діагональною матрицею σ з блоками σ_k, $k = \overline{1, N}$, вигляду (4.17).

Враховуючи формули (4.1), (4.14)-(4.17), можна побачити, що для тригонометричної функції регресії Γ є блочно-діагональною матрицею з блоками

$$\Gamma_k = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \tag{4.18}$$

$k = \overline{1, N}$.

Також варто зауважити, що як показано у розділі 2, для тригонометричної функції регресії (1.32) вірні наступні співвідношення

$$d_{3k-2,T}(\theta^0) \sim 2^{-1/2} T^{1/2}, \ \ d_{3k-1,T}(\theta^0) \sim 2^{-1/2} T^{1/2},$$

$$d_{3k,T}(\theta^0) \sim T^{3/2} \sqrt{\frac{1}{6}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}, \ \ k = \overline{1, N}. \tag{4.19}$$

Далі перейдемо від нормованої о.н.к. $d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ до нормованої о.н.к.

$$\Big(T^{1/2}\left(A_{1T} - A_1^0\right), T^{1/2}\left(B_{1T} - B_1^0\right), T^{3/2}\left(\varphi_{1T} - \varphi_1^0\right), \dots,$$

$$T^{1/2}\left(A_{NT} - A_N^0\right), T^{1/2}\left(B_{NT} - B_N^0\right), T^{3/2}\left(\varphi_{NT} - \varphi_N^0\right)\Big) \tag{4.20}$$

і введемо блочно-діагональну матрицю Z з блоками

$$Z_k = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}\left(A_k^0 + B_k^0\right)} \end{bmatrix}, \ \ k = \overline{1, N}. \tag{4.21}$$

В такому разі вектор (4.20) асимптотично нормальний $N(0, \tilde{\Gamma})$, де блочно-діагональна матриця $\tilde{\Gamma}$, містить блоки

$$2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \left[Z_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right)}} & 1 \end{bmatrix} Z_k \right]^{-1} =$$

$$= 4\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{2} \\ \frac{B_k^0}{2} & \frac{-A_k^0}{2} & \frac{1}{3}\left({A_k^0}^2 + {B_k^0}^2\right) \end{bmatrix}^{-1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.22)$$

Після обернення цих матриць отримуємо наступний результат, враховуючи, що всі умови, які накладались на функцію регресії в теоремі 2 (розділ 1) справедливі для тригонометричної функції регресії також. Зокрема, виконання умови **B2** (μ-припустимості с.щ. $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$) для тригонометричної функції регресії (1.32) доведено в роботі І.М. Савич [24].

Розглянемо множини $\Phi = \left\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0\right\}$ та $K = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r\}$. Тоді умова **B2** виконується, якщо

$$\Phi \cap K = \varnothing. \quad (4.23)$$

Теорема 6. *Якщо для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32) виконано умови **A1**, **A2**, **A3** при* $W = G$, *(4.23), то нормована о.н.к. (4.20) асимптотично нормальна* $N(0, \tilde{\Gamma})$, *із блочно-діагональною матрицею*

$$\tilde{\Gamma} = diag\left(\tilde{\Gamma}_k,\ k = \overline{1, N}\right) \quad (4.24)$$

з блоками

$$\tilde{\Gamma}_k = \frac{4\pi \sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!}}{{A_k^0}^2 + {B_k^0}^2} M_k, \quad (4.25)$$

$$M_k = \begin{bmatrix} {A_k^0}^2 + 4{B_k^0}^2 & -3A_k^0 B_k^0 & -6B_k^0 \\ -3A_k^0 B_k^0 & 4{A_k^0}^2 + {B_k^0}^2 & 6A_k^0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 12 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Висновки

У магістерській дисертації отримано асимптотичну нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та шумом, що є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Одержано достатні умови асимптотичної єдиності за ймовірністю о.н.к. параметрів нелінійної моделі регресії, що охоплює випадок тригонометричної регресії. З використанням теореми Брауера про нерухому точку отримано достатні умови асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів загальної нелінійної моделі регресії та розглянуто їх застосування до тригонометричної моделі регресії. Припускається, що параметрична множина, що містить невідоме істинне значення параметра, є відкритою опуклою множиною евклідового простору.

Природним напрямком продовження досліджень є апроксимація з достатньою точністю громіздкої коваріаційної матриці граничного гауссівського розподілу о.н.к., щоб наблизити отримані результати до практичних застосувань. Крім цього, бажано знайти інші приклади несумовних коваріаційних функцій та сингулярних спектральних щільностей стаціонарних часових рядів для збільшення кількості математичних моделей спостережень, аналогічних вивченій у дисертації.

Список використаних джерел

[1] Жураковський Б.М. Виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з локально перетвореним гаусівським стаціонарним шумом. Дис. ... кандидата фіз.- мат. наук. К: Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського".- 2015. - 146 с.

[2] Whittle P. The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure / P. Whittle // Trabajos Estadistica. – 1952. – Vol. 3. – P. 43-47.

[3] Walker A.M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals / A.M. Walker // Adv. Appl. Probab. – 1973. – Vol. 5. – P. 217-241.

[4] Hannan E.J. The estimation of frequency / E.J. Hannan // J. Appl. Probab. – 1973. – Vol. 10. – P. 510-519.

[5] Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов / А.Я. Дороговцев // К.: Вища школа. – 1982. – 192 с.

[6] Иванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // Теория Вероят. и Матем. Статист. – 1979. – №20. – С. 44-59.

[7] Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П.С. Кнопов // К.: Наукова думка. – 1980. – 151 с.

[8] Ivanov A.V. Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. – 2015. – V. 49, 1. – P. 156-186.

[9] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savich. Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra. // Ann. Probab. — 2013. — Vol. 41, №2. — P. 1088-1114.

[10] Т. О. Драбик. Асимптотична єдиність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії. // Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2019. – с. 15.

[11] Т. О. Драбик. Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії. // IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2020. – с. 8.

[12] Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M.Abramowitz, I.A. Stegun // New York: Dover Publications. – 1972. – 502 p.

[13] Хеннан Э. Многомерные временные ряды / Э. Хеннан // М. "Мир". – 1976. – 757 с.

[14] Grenander U. On the estimation of regression coufficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // Ann. Math. Statist. – 1954. – Vol. 25, 2. – P. 252-272.

[15] Ибрагимов И.А. Гауссовские случайные процессы / И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов // М.: Наука. – 1970. – 384 с.

[16] Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей / А.Я. Иванов, Н.Н. Леоненко // К.: Вища Школа. – 1986. – 216 с.

[17] A.V.Ivanov,N.N.Leonenko,M.D.Ruiz-Medina,I.N.Savich.Limit theorems for weighted nonlinear transformations of gaussian processes with singular spectra. // Ann.Probab.— 2013. — Vol. 41, №2. — P. 1088-1114

[18] Walker A.M. Some asymptotic results for the periodogram of a stationary time series / A.M. Walker // I. Aust. Math. Soc. – 1965. – Vol. 5. – P. 107-128.

[19] Pfanzagl J. On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates / J. Pfanzagl // Metrika. – 1969. – Vol. 14. – P. 249-272.

[20] Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem / J.H. Wilkinson // Oxford: Clarendon Press. – 1965. – 680 p.

[21] Ivanov A.V. A solution of the problem of detecting hidden periodicities / A.V. Ivanov // Theor. Probability and Math. Statist. – 1980. – №20. – P. 51-68.

[22] Гончаренко Ю.В. Теорема Брауэра / Ю.В. Гончаренко, С.И. Ляшко // К.: «КИЙ». – 2000. – 48 с.

[23] Бхаттачария Р.Н. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения / Р.Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао // М.: «Наука». – 1982. – 286 с.

[24] Савич I.М. Асимптотичні властивості оцінок Коенкера - Бассетта параметра нелінійної регресії з сильно залежним випадковим шумом. Дис. ... кандидата фіз.- мат. наук. К: Київський національний університет імені Тараса Шевченка.- 2017. - 144 с.